Лекция 10. Модели некоторых трудно формализуемых объектов (часть 3). Модели соперничества.

Пример 5. Гонка вооружений между двумя странами

Рассмотрим гонку вооружений между 2 странами.

Предположим, что общее количество вооружения первой страны есть $\mathbf{M_1(t)}$, а второй страны $\mathbf{M_2(t)}$.

$\mathbf{M_1(t)}$ **и** $\mathbf{M_2(t)}$ изменяются во времени в зависимости от трех факторов:

1. количество оружия у противника,
2. старение и износ уже существующего оружия
3. степени недоверия между противниками.

Тогда темпы изменения (прироста или сокращения) вооружений пропорциональны упомянутым факторам, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \frac{dM_2}{dt} &= \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$\mathbf{M_1(t)}$ - численность вооружения 1-й страны, $\mathbf{M_2(t)}$ - численность вооружения 2-й страны,

коэффициенты $\alpha_1(t) > 0$, $\alpha_2(t) > 0$ - это коэффициенты скорости наращивания в зависимости от вооружения противника

коэффициенты $\beta_1(t) > 0$, $\beta_2(t) > 0$ - коэффициенты старения своего вооружения

коэффициенты $\gamma_1(t) \ge 0$, $\gamma_2(t) \ge 0$ - это коэффициенты, характеризующие уровень взаимной настороженности, недоверия.

Модель (1) гонки вооружения, как и любая модель, не полна. Она кроме 3-х факторов не учитывает еще и другие факторы. Тем не менее, она позволит проанализировать ряд важных вопрос гонки вооружений.

Анализ модели (1) будет не сложным , если сделать допущения: пусть α_i, β_i, γ_i, $\mathbf{i}=1,2$, **- const**, то есть не зависят от времени **t.**

Тогда модель (1) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{dM_1}}{\mathbf{dt}} &= \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{M}_2 - \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{M}_1 + \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \frac{\mathbf{dM_2}}{\mathbf{dt}} &= \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{M}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{M}_2 + \boldsymbol{\gamma}_2\end{aligned} \qquad (2)$$

Нас интересует равновесное состояние (2), когда

$$\frac{\mathbf{dM}_1}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{dM}_2}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0},$$

то есть когда выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{M}_2 - \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{M}_1 + \gamma_1 = 0, \\ &\boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{M}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{M}_2 + \gamma_2 = 0\end{aligned} \qquad (2^*)$$

В этом случае нет наращивания оружия, то есть гонки вооружений нет.

Из уравнения (2*) определяем **величины вооружений** M_1^0, M_2^0**,** соответствующие равновесному состоянию:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1^0 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\gamma}_2 + \boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\gamma}_1}{\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}, \\ \mathbf{M}_2^0 &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\gamma}_2}{\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2}.\end{aligned} \qquad (3)$$

(выведите формулы)!!!

Проведем анализ формулы (3):

1. Поскольку M_1^0, M_2^0 **-** это реальные величины, они не могут быть отрицательными величинами. Поэтому $\mathbf{M_1^0 \geqslant 0}$, $\mathbf{M_2^0 \geqslant 0}$**.** Числитель в выражениях (3) всегда положителен. Поэтому знаменатель тоже должен быть положительным, то есть

$\boldsymbol{\beta_1\beta_2 > \alpha_1\alpha_2}$ **– есть условие равновесия.** (4)

2. Если в **(3) коэффициенты** $\boldsymbol{\gamma}_1 = 0,\ \boldsymbol{\gamma}_2 = 0$ (то есть взаимное недоверие между странами равно **0**) , то $M_1^0 = 0,\ M_2^0 = 0$**.**
То есть при полном доверии стран оружие отсутствует.

3. Из формулы (4) следует, что изменение одного параметра ведет к нарушению условия. Чтоб восстановить равновесие необходимо изменить остальные параметры.

Например, параметры α_1, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ постоянны, а параметр α_2 увеличивается. Это означает, что первая страна не меняет свою стратегию в отношении вооружений, а вторая увеличивает вооружение. Тогда при достаточно большом значении баланса, очевидно, станет невозможным, и неравенство (4) будет нарушено.

Пример 6. Боевые действия между двумя армиями

Полагаем, что

1. В боевых действиях могут участвовать как регулярные армии, так и партизанские соединения (неформальные соединения).

2. Основными характеристиками соперников в рассматриваемых моделях являются их численность $\mathbf{N}_1(t) \geq 0$ и $\mathbf{N}_2(t) \geq 0$.

3. Если в какой-либо момент времени **t** численность одной из сторон будет равна нулю $\mathbf{N}(t) = 0$, то она будет считаться потерпевшей поражение. А другая сторона – победитель.

Рассмотрим сначала случай боевых действий между 2-мя армиями.

Изменением численности армий будет определяться **3 факторами:**

1) **изменения** численности солдат **по причинам не боевых действий** (травмы, болезни, дезертирство и др.)

2) **темпы потерь численности, вызванных боевыми действиями** противоборствующей стороны (которые, в свою очередь, определяются качеством ее стратегии и тактики, уровнем морального духа и профессионализмом бойцов, оружия и т. д.);

3) **скорость поступления подкрепления**, которая считается заданной функцией.

С учетом 1) - 3) получаем систему уравнений изменений численности первой армии $\mathbf{N}_1(t)$ и второй армии $N_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}_1}{dt} &= -\alpha_1(t)\mathbf{N}_1(t) - \beta_2(t)\mathbf{N}_2(t) + \gamma_1(t), \\ \frac{d\mathbf{N}_2}{dt} &= -\alpha_2(t)\mathbf{N}_2(t) - \beta_1(t)\mathbf{N}_1(t) + \gamma_2(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) при заданных значениях $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ i = 1,2,$ и начальных условиях $\mathbf{N}_1(t = 0),\ \mathbf{N}_2(t = 0)$ есть задача Коши, которая однозначно определяет решение системы (5) для любого момента времени $t > 0$.

В (5) имеются коэффициенты:

$\alpha_{1,2} \geq 0$ - **коэффициенты**, характеризующие скорость потерь в силу не боевых действий.

$\beta_{1,2} \geq 0$ - **коэффициенты**, характеризующие темпы потерь из-за боевых действий соперника.

$\gamma_{1,2} \geq 0$ - **скорость** поступления подкреплений.

Рассмотрим теперь боевых действий между армией и неформальными (партизанскими) соединениями.

<u>Главное отличие</u> этого случая от первого случая заключается в том, что:

а) **партизанские соединения менее уязвимы** по сравнению с армией.

б) они действуют скрыто, оставаясь невидимыми для армии, **более мобильны** и др.

в) партизаны действуют не избирательно, локально, а по всей местности, занимаемой ими.

Поэтому считается, что темпы потерь партизан пропорционален не только численности армейских соединений $\mathbf{N_1(t)}$, но и численности самих партизан $\mathbf{N_2(t)}$, то есть задаются выражением $\boldsymbol{\beta_1(t)N_1(t)N_2(t)}$,

В результате модель для данного рассматриваемого случая становится нелинейной:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_2(t)N_2(t) + \gamma_1(t), \\
\frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2(t)N(t)_2 - \beta_1(t)N_1(t)N_2(t) + \gamma_2(t).
\end{aligned} \qquad (6)$$

Все величины в (6) имеют тот же смысл.

Модели (5)- (6) называются моделями Ланчестера.

<u>Изучим модели</u> (5) - (6) при условии $\boldsymbol{\gamma_1 = \gamma_2 = 0}$, то есть в условиях, когда нет подкрепления, поддержки.

Кроме того, будем считать
$\boldsymbol{\alpha_1 = const,\ \alpha_2 = const,\ \beta_1 = const,\ \beta_2 = const,}$

Тогда модель (5) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1 N_1(t) - \beta_2 N_2(t), \\
\frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2 N_2(t) - \beta_1 N_1(t).
\end{aligned} \qquad (7)$$

Из уравнений (7) видно, что правая сторона уравнений имеет знак «–». То есть наблюдается убывание численности N_1(t) и N_2 (t) обеих

Какая из армий потерпит поражение?

Для этого анализа сделаем еще одно предположение, то есть допустим $\alpha_1 = 0$**,** $\alpha_2 = 0$**.**

Это предположение может иметь место и говорит о краткосрочности сражений. За этот короткий период травмы и болезни в армии не будут иметь место.

После этих допущений модель боевых действий 2 армий станет совсем простой:

$$\mathbf{\frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2(t),} \\ \mathbf{\frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1(t).} \tag{8}$$

Домножая первое уравнение в (8) на $\mathbf{\beta_1 N_1(t)}$, а второе уравнение (8) на $\mathbf{\beta_2 N_2(t)}$ вычитаем из первого второе, находим интеграл:

Проделать выкладки и получить следуюшее соотношение !!! :

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - \beta_2 N_2^2(0) = C. \tag{9}$$

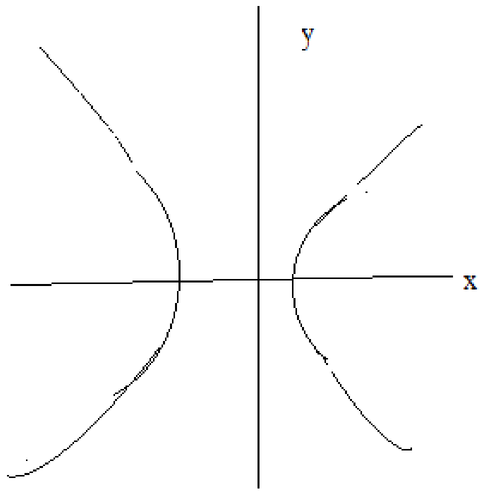
В зависимости от С решится ход сражений:

1) при С> 0 первая армия выигрывает $\rightarrow$ $\mathbf{N_1} = \sqrt{\dfrac{\beta_2 N_2^2 + |c|}{\beta_1}}$. (10)

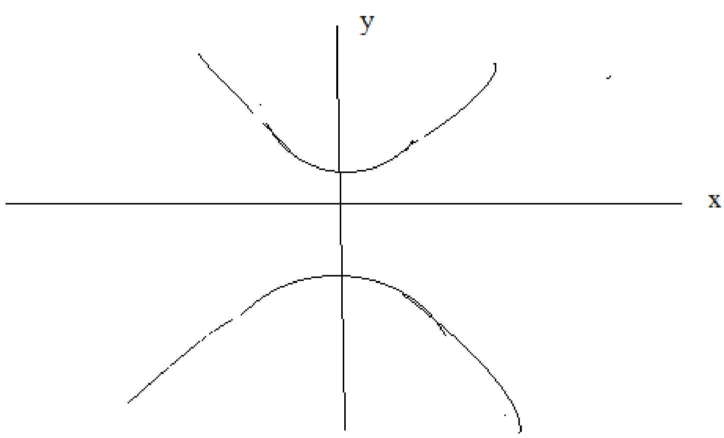
2) при C < 0 побеждает вторая; $\rightarrow$ $\mathbf{N}_2 = \sqrt{\dfrac{\beta_1 N_1^2 + |c|}{\beta_2}}$. (11)

3) в случае C = 0 обе стороны уничтожают друг друга одновременно, и победителя не существует. → $\mathbf{N_1} = \mathbf{N_2}\sqrt{\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\boldsymbol{\beta}_1}}$. (12)

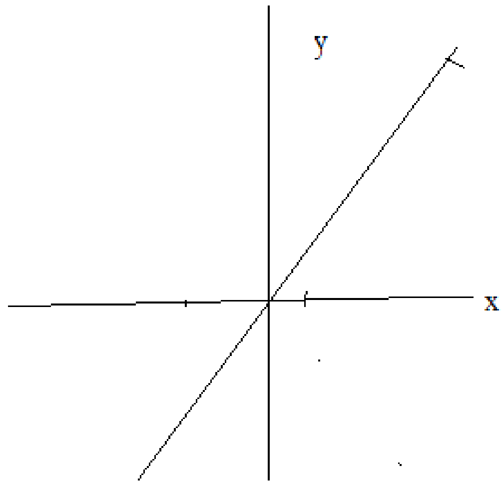
Для случая 1) – это график гиперболической функции вида $\mathbf{x = \pm\sqrt{ay^2 + by + c}}$ - иррациональная функция.



Для случая 2) – это график гиперболической функции вида $\mathbf{y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ – иррациональная функция.



Для случая 3) графиком служит линейная функция вида **y=кх –** линейная функция.



При этом под y понимается $\mathbf{N}_2$, а под **x** понимается $\mathbf{N}_1$. Графики представлены на рис. 2.

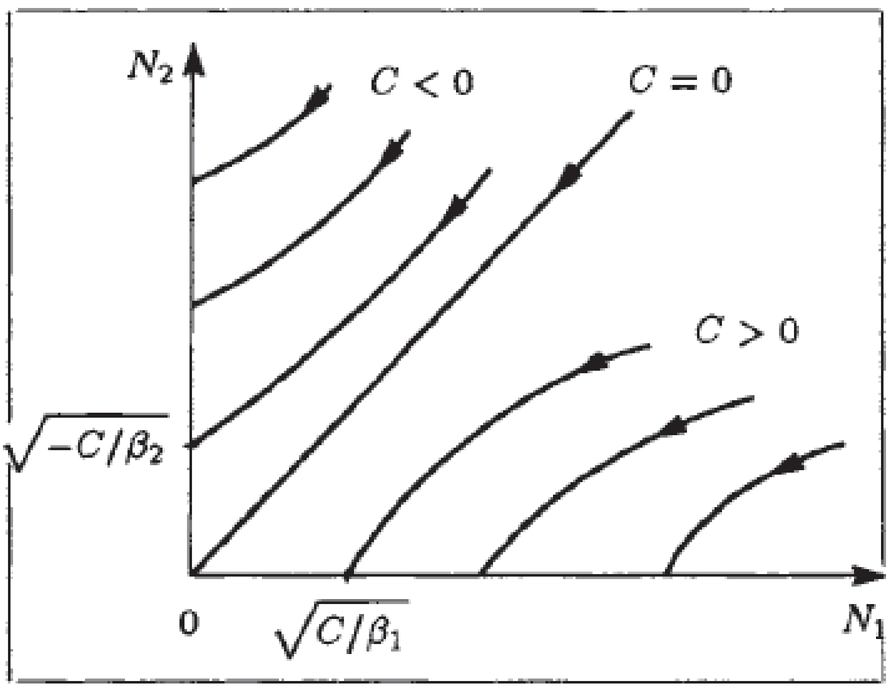


Рис. 2. - Гиперболы

Из формулы (9) видно, что на исход событий влияют не только численность армий в начальный момент $\mathbf{N}_1(0)$, $\mathbf{N}_2(0)$, но коэффициентов $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, которые определяют уровень техники, выучки и стратегии действий).

Например, при победе 1 армии (если C > 0), из (9) следует:

$$\beta_1 N_1^{\,2}(0) > \beta_2 N_2^{\,2}(0), \qquad (**)$$

Для победы 2-й армии необходимо поменять знак неравненства в (**) на противоположный, то есть $<$.

Это возможно достичь увеличением численности второй армии $\mathbf{N_2(0)}$ или увеличением $\boldsymbol{\beta_2}$ (улучшить стратегию и качество вооружения). Но рост $\boldsymbol{\beta_2}$ менее эффективен, так как зависимость от него линейная. А увеличение $\mathbf{N_2(0)}$ будет более эффективным, так как у него закон нелинейный, в квадрате.

Рассмотрим вторую модель Ланчестера (6) при тех же предположениях, то есть:

$$\frac{\mathbf{dN_1}}{\mathbf{dt}} = -\boldsymbol{\beta}_2\mathbf{N}_2(\mathbf{t}), \qquad |*\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{N}_1$$

$$- \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{N}_1\frac{\mathbf{dN_1}}{\mathbf{dt}} - \boldsymbol{\beta}_2\frac{\mathbf{dN}_2}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \qquad (13)$$

$$\frac{\mathbf{dN_2}}{\mathbf{dt}} = -\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{N}_1(\mathbf{t})\mathbf{N}_2(\mathbf{t}).\| * \boldsymbol{\beta}_2$$

То есть, домножая первое уравнение в (13) на $\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{N}_1(\mathbf{t})$, а второе уравнение (813 на $\boldsymbol{\beta}_2$ вычитаем из первого второе.

Можно представить

$$\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{N}_1\frac{\mathbf{dN_1}}{\mathbf{dt}} - \boldsymbol{\beta}_2\frac{\mathbf{dN}_2}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}\ ,$$

как $$\frac{d}{dt}\left[\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{2}\mathbf{N}_1^2(t) - \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{N}_2\right] = \mathbf{0} \qquad (14)$$

Интегрируя (14) , имеем:

$$\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{2}\mathbf{N}_1^{\ 2}(\mathbf{t}) - \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{N}_2(\mathbf{t}) = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{2}\mathbf{N}_1^{\ 2}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{N}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{C}_1. \qquad (15)$$

Изучим фазовые портреты (13) с помощью интеграла (15). Представим их на рис.3.

1) при $C_1 > 0$ - побеждает армия.

$$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = C_1. \quad \Rightarrow \quad N_2(t) = \frac{\beta_1}{2\beta_2}N_1^2 - \frac{C_1}{\beta_2} \quad \text{- парабола}$$

2) при $C_1 < 0$ - побеждают партизаны (неформальные соединения)

$$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = -|C_1|. \quad \Rightarrow \quad N_2(t) = \frac{\beta_1}{2\beta_2}N_1^2 + \frac{|C_1|}{\beta_2} \text{ - парабола}$$

3) при $C_1 = 0$ победителей нет.

$$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{\beta_1}{2\beta_2}N_1^2 \text{ - парабола}$$

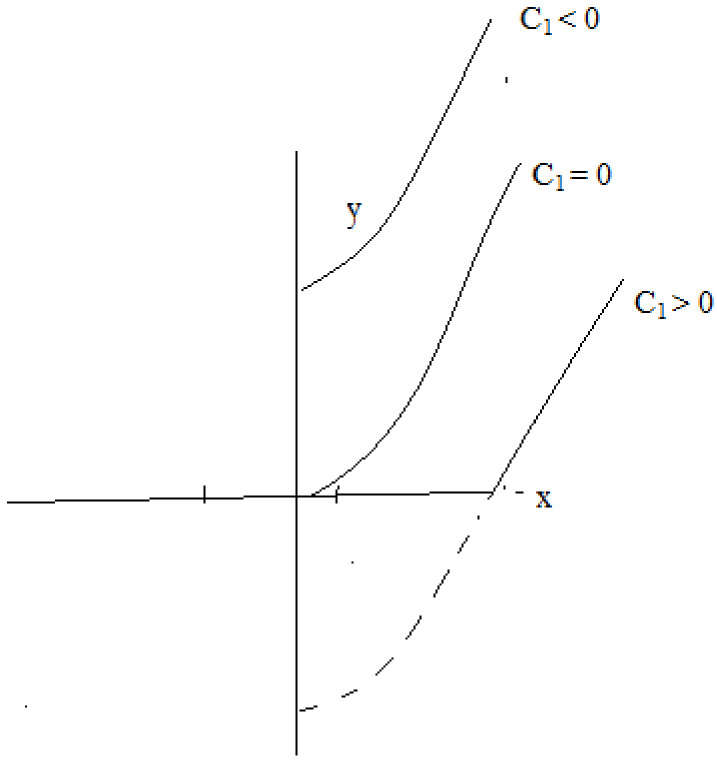


Рис. 3

Рассмотрим случай, когда $C_1 > 0$ - побеждает армия.

$\frac{\beta_1}{2}N_1^2(t) > \beta_2 N_2(t)$. Для смены знака придется увеличить коэффициент β_2, или N_2, причем значительно, поскольку N_1 содержится нелинейным образом. Увеличивая его в 2 раза, получим эффект увеличения функции в 4 раза. А в случае N_2 ее увеличение в 2 раза приведет к увеличению самой функции только в 2 раза.

Таким образом, эффективность армии сильнее за счет нелинейности функции, а партизанские или неформальные соединения находятся в невыигрышном положении. и требуется больших усилий с их стороны, чтоб переломить ход сражений в их сторону.